ZUR BERECHNUNG

DER

KRYSTALLFORMEN.

VON

FRANZ v. KOBELL.

MÜNCHEN
JOSEPH LINDAUER'SCHE BUCHHANDLUNG
1867.

 Kobell

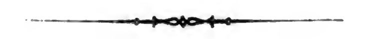
ZUR BERECHNUNG

DER

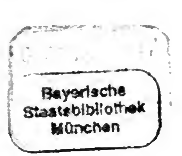
KRYSTALLFORMEN.

VON

FRANZ v. KOBELL.



MÜNCHEN
JOSEPH LINDAUER'SCHE BUCHHANDLUNG
1867.



AKADEMISCHE BUCHDRUCKEREI VON F. STRAUB

Vorwort.

Ich habe in den folgenden Blättern die Berechnung der Krystallformen mit Anwendung der sphärischen Trigonometrie weiter ausgeführt als in betreffenden früheren Publicationen und habe dabei auf die Berechnung der Naumann'schen Zeichen besonders Rücksicht genommen.

Man ist bei Krystallberechnungen von jeher verschiedene Wege gegangen, es scheint mir aber, die Anwendung der sphärischen Trigonometrie habe vor anderen Methoden schon darin einen Vorzug, dass sie die Basis der Rechnung jederzeit anschaulich darlegt, denn diese Basis ist wesentlich das sphärische Dreieck. Wenn dieses an der zu berechnenden Gestalt zweckmässig gelegt ist und wenn man seine Winkel und Seiten richtig deutet, was keine Schwierigkeiten hat, so ist die Rechnung mit den bekannten Formeln klar vorgezeichnet und in den meisten Fällen ebenso leicht auszuführen. Es ist letzteres um so mehr der Fall, als man es weit öfter mit rechtwinkligen sphärischen Dreiecken zu thun hat als mit schiefwinkligen und eine Berücksichtigung der Hauptschnitte an den Krystallformen dabei mancherlei Vortheile gewährt.

Man überzeugt sich davon am einfachsten, wenn man die Formen mit den eingezeichneten sphär. Dreiecken vor sich hat und ich habe desshalb betreffende Zeichnungen beigefügt.

Denjenigen, welche sich in dergl. Berechnungen einüben wollen, sind besonders v. Kokscharow's „Materialien zur Mineralogie Russlands" zu empfehlen, welche mit Anwendung der Naumann'schen Bezeichnung und Ableitung die erforderlichen Winkel für die verschiedensten Fälle sehr genau angeben. Auch dessen „Vorlesungen über Mineralogie" enthalten zahlreiche Messungen und vortreffliche instructive Krystallzeichnungen.

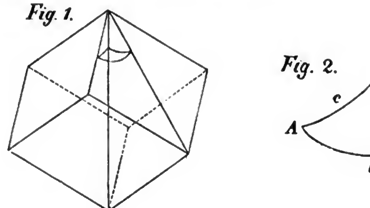
Da bei den folgenden Berechnungen die Nauman'sche Ableitung angenommen ist, so können für die Entwickelung der Combinationen auch alle Vortheile benützt werden, welche der Gründer dieser Ableitung in seinem bekannten krystallographischen Werken mitgetheilt hat.

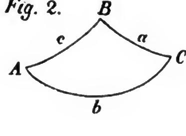
München, im Mai 1867.

v. Kobell.

Rhomboeder.

Legt man ein sphär. △ wie in Fig. 1 so ist der Winkel der Rhomboederfläche mit dem vertikalen Hauptschnitt = 90°. Es ist dann in diesem sphär. △ Fig. 2.





A der halbe Scheitelkantenwinkel*)
$B = 60°$; $C = 90°$.
a die Neigung der Fläche zur Axe,
b der halbe ebene Winkel der Fl. am Scheitel,
c die Neigung der Scheitelkante zur Axe.

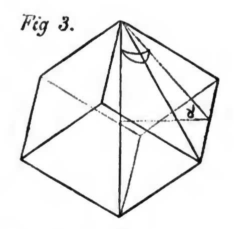
---

*) Anmerkung. Der Abkürzung wegen bezeichne Scheitelkt. = Scheitelkante, Scheitlktw. = Scheitelkantenwinkel, Randktw. = Randkantenwinkel etc.

Gegeben:	Gesucht:
Der halbe Scheitlktw. A	Die Neigung der Fläche zur Axe $= a$ $\cos a = \frac{\cos A}{\sin 60^0}$ (1)
" " "	Der ebene Winkel d. Fl. am Scheitel $= b$ $\cos {}^1/_2 b = \frac{\cos 60^0}{\sin A}$ (2)
" " "	Die Neigung der Schtlkt. zur Axe $= c$ $\cos c = \text{cotg.} A \ \text{cotg.} 60^0$ (3)
Die Neigung der Fläche zur Axe $= a$	Der Scheitlktw. $= A$ $\cos {}^1/_2 A = \cos a \ \sin 60^0$ (4)
" " "	Der ebene Winkel d. Fl. am Scheitel $= b$ $\text{tg} {}^1/_2 b = \text{tg} 60^0 \ \sin a$ (5)
" " "	Die Neigung der Schtlkt. zur Axe $= c$ $\text{tg} c = \frac{\text{tg} a}{\cos 60^0} = 2 \text{tg} a$ (6)
Der halbe ebene Winkel der Fl. am Scheitel $= b$	Der Schtlktw. A $\sin {}^1/_2 A = \frac{\cos 60^0}{\cos b}$ (7)
" " " "	Die Neigung der Fl. zur Axe $= a$ $\sin a = \frac{\text{tg} b}{\text{tg} 60^0}$ (8)
" " " "	Die Neigung der Schtlkt. zur Axe $= c$ $\sin c = \frac{\sin b}{\sin 60^0}$ (9)
Die Neigung der Schtlkt. zur Axe $= c$	Der Schtlktw. A $\text{cotg} {}^1/_2 A = \frac{\cos c}{\text{cotg} 60^0}$ (10)
" " "	Der ebene Winkel am Scheitel $= b$ $\sin {}^1/_2 b = \sin c \ \sin 60^0$ (11)
" " "	Die Neigung der Fl. zur Axe $= a$ $\text{tg} a = \text{tg} c. \cos 60^0 = {}^1/_2 \text{tg} c$ (12)

Das allgemeine Zeichen eines Rhomboeders ist R und $m\,R$, für die verwendete Stellung $-R$, $-m\,R$.

Um den Ableitungscoefficienten m zu bestimmen hat man Fig. 3 den Winkel γ zu berechnen, welchen eine aus der Mitte der Randkt. nach dem Scheitel gezogene Linie mit der aus der Mitte dieser Kante auf die Hauptaxe gezogenen Normalen bildet.



Wenn die Neigung der Fl. zur Axe $= a$ Form. (1), berechnet, so ist $\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{cotg} a \cos 30^\circ$. Es ist $\operatorname{tg}\gamma$ die halbe Axenlänge des Rhomboeders $m\,R$, welche durch die der Stammform R dividirt, den Ableitungscoeffic. m giebt. An einem Rhomboeder des Calcit ist der Schtlktw. $= 65^\circ\ 50'$; daraus berechnet sich nach (1) die Neigung der Fl. zur Axe $= a = 14^\circ\ 14'$ und $\gamma = 73^\circ\ 41'$. Es ist $\operatorname{tg}\gamma = 3.4160$ und durch die Axenlänge der Stammform (des Rhomboeders von $105^\circ\ 5'$) $= 0.8543$ dividirt $\frac{3.4160}{0.8543} = 4 = m$, daher das Zeichen dieses Rhomboeders $= 4\,R$ (da es nicht in verwendeter Stellung gegen R).

Um aus gegebenem m das Rhomboeder zu berechnen, hat man die Axenlänge der Stammform mit m zu multipliciren und erhält so $\operatorname{tg}\gamma$ und daraus γ und weiter die Neigung der Fl. zur Axe $= a$ durch die Formel $\operatorname{cotg} a = \frac{\operatorname{tg}\gamma}{\cos 30^\circ}$ und nach (4) den Scheitelkantenwinkel etc.

Ein oft vorkommendes Rhomboeder am Calcit ist $-\frac{1}{2}\,R$.

Um seine Winkel zu berechnen hat man für die Axenlänge der Stammformen = 0.8543

0.8543 . $^1/_2$ = 0.4271 = tg γ u. γ = 23° 7′; daraus findet sich die Neig. der Fl. zur Axe = 63° 47′ und damit nach (4) der Schtlktw. A = 135° (134° 57′).

Hexagonpyramide.

Im sphär. △ an der Basis der Pyramide der Fig. 4 u. 5 ist

A = dem halben Randktw.

b = 60° (cos 60° = sin 30 = $^1/_2$),

a = der Neigung der Schtlkt. zur Diagonale der Basis,

c = dem ebenen Winkel der Fläche am Rande.

Fig. 4.

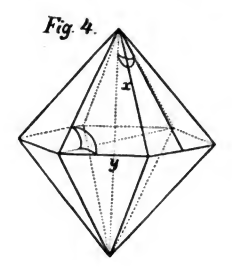


Fig. 5.

Gegeben:	Gesucht:
Der halbe Randktw. A	Der Schtlktw. B $\cos {}^1/_2 B = {}^1/_2 \sin A$ (13)
„ „ „	Die Neigung der Schtlkt. zur Diagonale der Basis = a $\operatorname{tg} a = \operatorname{tg} A \sin 60^\circ$ (14)

Gegeben:	Gesucht:
Der halbe Randktw. A	Der ebene Winkel der Fläche an der Basis $= c$ $\operatorname{cotg} c = \cos a \operatorname{cotg} 60^0$ (15)
Der halbe Schtlktw. B	Der Randktw. A $\sin {}^1/_2 A = 2 \cos B$ (16)
" " "	Die Neigung der Schtlkt. zur Diagonale der Basis $= a$ $\sin a = \frac{\operatorname{tg} 60^0}{\operatorname{tg} B}$ (17)
" " "	Der ebene Winkel der Fläche am Rand $= c$ $\sin c = \frac{\sin 60^0}{\sin B}$ (18)

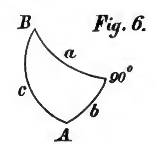


Fig. 6.

Wenn an der Hexagonpyramide ein sphär. △ gelegt wird wie in Fig. 4 das am Scheitel liegende, so ist der Winkel an der Höhenlinie der Fläche $= 90^0$, der an der Axe $= 30^0$.

Es findet sich dann aus dem halben Schtlktw. A (Vergl. Fig. 6)

die Neigung der Schtlkt. zur Axe $= c$ durch

$$\cos c = \operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} 30^0 \quad (19)$$

die Neigung der Fläche zur Axe $= a$ durch

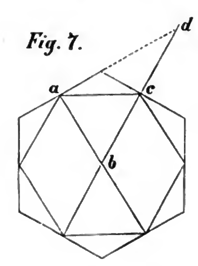
$$\cos a = 2 \cos A \quad (20)$$

der ebene Winkel der Fläche am Scheitel $= 2\,b$ durch

$$\cos b = \frac{\cos 30^0}{\sin A} \quad (21)$$

Zur Bestimmung der halben Axenlänge, die halbe Diagonale der Basis $= 1$ gesetzt, dient für die Pyramiden in normaler Stellung $m\,P$ Formel (14) und ist $\operatorname{tg} a$ die verlangte

Axenlänge, für diagonal stehende Pyramiden $m P 2$ bestimmt die Tangente des halben Randktw. die Axenlänge. Bei der Ableitung dieser Pyramiden wird $b c$ zu $b d$ (Fig. 7), d. i. das doppelte von $b c$, daher das Zeichen $m P 2$. Durch Division der berechneten Axenlänge mit der für die Stammform bestimmten, erhält man für die abgeleiteten Pyramiden den Coefficienten m.



Am Smaragd kommt eine Hexagonpyramide $m P$ vor, deren Randktw. = 81° 39′. Nach Formel ([14]) findet sich die Neigung der Schtlkt. zur Diagonale der Basis = a = 36° 48′ 12″, dessen Tangente = 0.7481 durch die Axenlänge der Stammform 0.5 dividirt, sehr nahe $m = 1.5$ giebt, daher die Pyr. $^3/_2 P$.

Am Korund findet sich eine diagonale Pyr. mit dem Randktw. von 122° 18′. Die Tangente des halben Randktw. ist 1.8156 und durch den Axenwerth des Stammrhomboeders, welcher = 1.3617, dividirt, erhält man $m = 1.333 = {}^4/_3$ und ist daher das Zeichen der Pyr. $^4/_3 P 2$.

Um aus dem Zeichen die Pyramide zu berechnen hat man wieder zu unterscheiden, ob die Pyr. eine $m P$ oder eine $m P 2$. Für letztere multiplicirt man m mit der Axe der Stammform und erhält damit die Tangente des halben Randktw., ist aber die Pyramide eine $m P$ so giebt m mit der Axenlänge der Stammform multiplicirt, die Tangente des Winkels der Schtlkt. mit der Diagonale der Basis. Wenn dieser Winkel = a so

findet sich der Randktw. $= 2A$ durch die Formel $\operatorname{tg} A = \frac{\operatorname{tg} a}{\sin 60^0}$

und der Schtlktw. $= 2B$ durch die Formel $\operatorname{tg} B = \frac{\operatorname{tg} 60^0}{\sin a}$.

Dihexagonale Pyramide.

Die dihexagonale Pyramide wird wie das Dioktaeder berechnet (s. dieses im folgenden System) nur bilden die Hauptschnitte durch die Scheitelkanten miteinander einen Winkel von 30°, nicht wie beim Dioktaeder einen Winkel von 45°. Das Zeichen ist mPn. Zur Bestimmung von m und n berechnet man mit dem halben Winkel der normalen Schtlkt. x und der Randkante z die Neigung von x zur Basis $= b$ und den halben Winkel der Basis am Randeck $r = a$. Wenn im sphär. △ Fig. 9. $A = \frac{1}{2}x$, $B = \frac{1}{2}z$ so ist $\cos b = \frac{\cos B}{\sin A}$ und $\cos a = \frac{\cos A}{\sin B}$. Es ist dann $\operatorname{tg} b$, dividirt durch die Axenlänge der Stammform $= m$ und $\frac{n}{2-n} = \operatorname{tg} a \sqrt{\frac{1}{3}}$.

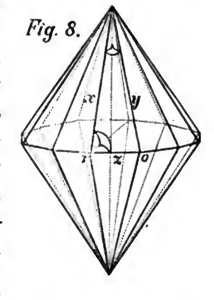


Fig. 8.

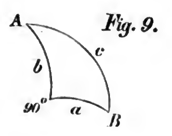


Fig. 9.

Um zu beurtheilen, welche der Kanten x oder y die normalen sind, muss man die Lage der Stammform kennen; die normalen Schtlkt. der dihexagonalen Pyramide neigen sich zur Diagonale der Basis der Stammform.

Am Smaragd misst an einer solchen Pyramide der Winkel der normalen Schtlkt. x 164° 31′ 9″ und y = 153° 1′ 6″, daraus berechnet sich die Neigung der Kante x zur Hauptaxe = 45° 3′, folglich die Neigung dieser Kante zur Basis = b = 44° 57′; an obigem △ ist B der halbe Randkantenwinkel und $\cos B = \cos b \sin A$, woraus B = 45° 29′ gefunden wird, der Randktw. also = $2B$ = 90° 58′. $\operatorname{tg} b = 0.998$, die Axe der Stammform = 0.5, es ist daher $\frac{0.998}{0.5} = 1.996$, daher $m = 2$, ferner ist $\operatorname{tg} a = \operatorname{tg} A \sin b$ und a = 79° 6′ 34″, $\operatorname{tg} a \sqrt{1/3} = 3 = \frac{n}{2-n}$, daher $n = 1.5 = 3/2$ und das Zeichen der Pyramide $2P\,3/2$.

Umgekehrt findet sich aus $m = \operatorname{tg} b$, b = 44° 57′ und $n = 3/2$ gibt $\frac{n}{2-n} = 3$, folglich $\operatorname{tg} a = \frac{3}{\sqrt{1/3}}$, damit a = 79° 6′ 34″ und weiter mit a und b die Winkel $A = 1/2\, x$ und $B = 1/2\, z$ durch die Formeln

$$\operatorname{tg} A = \frac{\operatorname{tg} a}{\sin b} \text{ und } \operatorname{tg} B = \frac{\operatorname{tg} b}{\sin a}.$$

Wenn an einem Prisma ∞Pn der halbe Winkel der normalen Seitenkanten, welche die Diagonale der Basis der Stammform schneiden, $= x$, so ist $\operatorname{tg} x \sqrt{1/3} = \frac{n}{2-n}$.

Skalenoeder.

Es sei der Winkel an den kürzeren (schärferen) Scheitelkanten $= x$, an den längeren (stumpferen) $= y$, an den Randkanten $= z$.

1. Gegeben x und y, gesucht z

$$\sin {}^1\!/_2 z = \cos {}^1\!/_2 x + \cos {}^1\!/_2 y \quad (^{22})$$

2. Gegeben x und z, gesucht y

$$\cos {}^1\!/_2 y = \sin {}^1\!/_2 z - \cos {}^1\!/_2 x \quad (^{23})$$

3. Gegeben y und z, gesucht x

$$\cos {}^1\!/_2 x = \sin {}^1\!/_2 z - \cos {}^1\!/_2 y \quad (^{24})$$

Fig. 10.

Legt man in den Scheitel des Skalenoeders ein sphär. △ so, dass dessen Winkel in die Schtlkt. und in die Axe fallen, so ist

A der halbe Schtlktw. $^1\!/_2 x$

C „ „ „ $^1\!/_2 y$

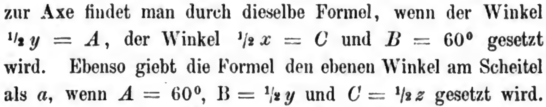
$B = 60^0$ (S. Fig. 10 u. 11.)

Die Neigung der längeren Schtlkt. zur Axe $= a$ berechnet man durch die Formel (^{25})

$$\cos a = \frac{2 \cos {}^1\!/_2 (A + x^1) \cos {}^1\!/_2 (A - x^1)}{\sin B \sin C}$$

und $\cos x^1 = \cos B \cos C = {}^1\!/_2 \cos C$

Fig. 11.



Die Neigung der kürzeren Schtlkt. zur Axe findet man durch dieselbe Formel, wenn der Winkel $^1\!/_2 y = A$, der Winkel $^1\!/_2 x = C$ und $B = 60^0$ gesetzt wird. Ebenso giebt die Formel den ebenen Winkel am Scheitel als a, wenn $A = 60^0$, $B = {}^1\!/_2 y$ und $C = {}^1\!/_2 z$ gesetzt wird.

Aus dem am Randeck (s. Fig. 10) gelegten sphär. △ findet man den stumpfen ebenen Winkel der Fläche, wenn $^1\!/_2 y = A$, $^1\!/_2 x = B$ und der Randkantenwinkel $z = C$ gesetzt wird, indem man nach derselben Formel wieder a berechnet.

An einem beim Calcit gewöhnlichen Skalenoeder ist $x = 104^0\,38'$, $y = 144^0\,24'$, z nach (^{22}) $= 132^0\,58'$; die Neigung von x zur Axe $= 26^0\,52'$; die Neigung von y zur

Axe $= 22^\circ 4'$, der ebene Winkel am Scheitel $= 24^\circ 14'$, der stumpfe ebene Winkel am Rand $= 101^\circ 2'$.

Das Zeichen des Skalenoeders ist allgemein $m R n$, indem jedes Skalenoeder durch Verlängerung der Axe eines eingeschriebenen Rhomboeders abgeleitet wird, dessen Randkanten dieselbe Lage haben wie die des Skalenoeders. Der Coefficient, welcher die Axe dieses Rhomboeders verlängert, ist n; der Coefficient, welcher für das eingeschriebene Rhomboeder die Axe des Stammrhomboeders verändert, ist m.

Für die Berechnung von m und n sind zwei Kantenwinkel des Skalenoeders und die Axenlänge a des Stammrhomboeders R nothwendig.

Sind die Winkel x und z bekannt, so ist nach Naumann

$$\frac{2n}{n+1} = \frac{\sin {}^1/_2 z}{\cos {}^1/_2 x}, \qquad (26)$$

woraus sich n bestimmt, dann ist

$$\cos \beta = \frac{1}{n\sqrt{3}\,\operatorname{cotg} {}^1/_2 z} \quad \text{und} \qquad (27)$$

$$m = \frac{\operatorname{cotg} \beta \sqrt{3}}{a}. \qquad (28)$$

Wenn das eingeschriebene Rhomboeder bekannt ist, so genügt zur Berechnung von n ein Kantenwinkel des Skalenoeders Wenn z der Randktw. des Skalenoeders und z^1 der Randktw. des eingeschriebenen Rhomboeders, so ist

$$n = \operatorname{tg} {}^1/_2 z \operatorname{cotg} {}^1/_2 z^1.$$

An einem Skalenoeder des Calcit misst der Schtlktw. $x = 138^\circ 2'$, $y = 159^\circ 23'$, damit berechnet sich nach Formel (22) der Randktw. $z = 64^\circ 58'$; Formel (26) gibt $\frac{2n}{n+1} = 1.5$ also $n = 3$, dann ist nach (27) $\beta = 82^\circ 57'$ und nach (28), da die Axenlänge der Stammform oder $a = 0.8543$,

ist m nahezu $0.25 = {}^1/_4$, daher das Zeichen dieses Skalenoeders ${}^1/_4\, R3$.

Umgekehrt findet man bei gegebener Axenlänge der Stammform $= a$, aus dem Zeichen die Kantenwinkel etc. Es ist dann $\operatorname{cotg} \beta = \frac{m\,a}{\sqrt{3}}$ und $\operatorname{cotg} {}^1/_2 z = \frac{1}{\cos \beta\, n \sqrt{3}}$, ferner $\cos {}^1/_2 x = \frac{\sin {}^1/_2 z\ (n+1)}{2\,n}$. — Bei Skalenoedern von der Form $m R3$ ist $\cos {}^1/_2 x = 2 \cos {}^1/_2 y$; $\sin {}^1/_2 z = 3 \cos {}^1/_2 y$ etc.

Quadratpyramide.

In dem am Randeck gelegten sphär. △ (s. Fig. 12 u. 13) ist
- a die Neigung der Schtlkt. zur Diagonale der Basis
- B der halben Schtlktw.
- c der ebene Winkel der Fläche am Rand.
- A der halbe Randktw.
- $b = 45^0$ ($\operatorname{tg} 45 = \operatorname{cotg} 45^0 = 1$).
- $C = 90^0$.

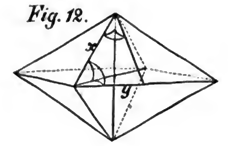


Fig. 12.

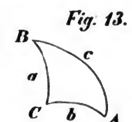
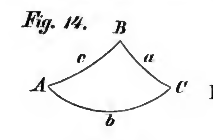


Fig. 13.

Gegeben:	Gesucht:
Der halbe Schtlktw. B	Der Randktw. A $\sin {}^1/_2 A = \frac{\cos B}{\cos 45^0}$ (29)

Gegeben:	Gesucht:
Der halbe Schtlktw. B	Die Neigung der Schtlkt. zur Diagonale der Basis $= a$ $\sin a = \operatorname{cotg} B$ (30)
" " "	Der ebene Winkel der Fl. am Rand $= c$ $\sin c = \frac{\sin 45^0}{\sin B}$ (31)
Der halbe Randktw. A	Der Schtlktw. B $\cos \frac{1}{2} B = \cos 45^0 \sin A$ (32)
" " "	Die Neigung der Scheitelkt. zur Diagonale der Basis $= a$ $\operatorname{tg} a = \operatorname{tg} A \sin 45^0$ (33)
" " "	Der ebene Winkel der Fl. am Rand $= c$ $\operatorname{cotg} c = \cos A$ (34)

In dem am Scheitel gelegten sphär. $\triangle$ ist



c die Neigung der Schtlkt. zur Axe
a " " " Fläche " "
b der halbe ebene Winkel der Fläche am Scheitel

$B = 45^0$; $C = 90^0$

Gegeben:	Gesucht:
Der halbe Schtlktw. A	Die Neigung der Schtlkt. zur Axe $= c$ $\cos c = \operatorname{cotg} A$ (35)
" " "	Die Neigung der Fläche zur Axe $= a$ $\cos a = \frac{\cos A}{\sin 45^0}$ (36)
" " "	Der ebene Winkel der Fläche am Scheitel $= b$ $\cos \frac{1}{2} b = \frac{\cos 45^0}{\sin A}$ (37)

Die halbe Axenlänge für die halbe Diagonale der Basis $= 1$ findet sich bei P und bei den normal stehenden Pyramiden mP nach der Formel (30) bei gegebenem Schtlktw. und nach Formel (33) bei gegebenem Randktw., wo $\operatorname{tg} a$ die verlangte Axenlänge; für die diagonalstehenden Pyramiden $P\infty$ und $mP\infty$ giebt die Tangente des halben Randktw. diese Axenlänge. Durch Division mit der Axenlänge der Stammform findet sich der Coefficient m. Am Anatas findet sich eine mP mit dem Randktw. $53^0\ 8'$; nach Formel (33) berechnet sich $a = 19^0\ 28'\ 21''$, dessen $\operatorname{tg} = 0.3535$. Die Axenlänge der Stammform ist 1.767; $m = \frac{0.3535}{1.767} = 0.2 = {}^1/_5$, daher das Zeichen ${}^1/_5\,P$. — Eine $mP\infty$ des Anatas hat den Randktw. $148^0\ 24'$; $\operatorname{tg} 74^0\ 12' = 3.534$, durch die Axenlänge der Stammform dividirt $\frac{3.534}{1.767} = 2$, daher das Zeichen $2P\infty$.

Um aus dem Zeichen die Quadratpyramide zu berechnen, hat man m mit der Axenlänge der Stammform zu multipliciren und ist das Product die Tangente des halben Randktw., wenn die Pyramide eine $mP\infty$; ist sie aber eine mP, so erhält man auf diese Weise die Tangente des Winkels der Schtlk. zur Diagonale. Wenn dieser $= a$ und der Randktw. $= 2A$, so ist $\operatorname{tg} A = \frac{\operatorname{tg} a}{\sin 45^0}$.

Dioktaeder.

In dem am Scheitel gelegten sphär. $\triangle$ (s. Fig. 15 u. 16) ist

A der halbe Winkel der stumpferen Schtlkt. x,

C „ „ „ „ schärferen „ y,

$B = 45^0$,

c die Neigung der stumpferen Schtlkt. zur Axe,
a „ „ „ schärferen „ „ „
b der ebene Winkel der Fläche am Scheitel.

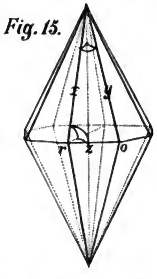


Fig. 15.

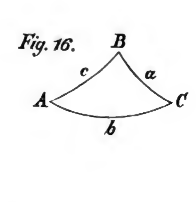


Fig. 16.

Wenn die halben Winkel der Kanten x und $y = A$ und C gegeben sind, so berechnet sich die Neigung der schärferen Schtlkt. y zur Axe $= a$ nach der Formel

$$\cos a = \frac{2 \cos \frac{1}{2} (A + x^1) \cos \frac{1}{2} (A - x^1)}{\sin B \sin C}$$

$$\cos x^1 = \cos B \cos C.$$

Die Neigung der stumpferen Schtlkt. zur Axe giebt dieselbe Formel, wenn $\frac{1}{2} y = A$ gesetzt wird und $\frac{1}{2} x = C$, die gesuchte Neigung ist dann a.

Um den ebenen Winkel der Fläche am Scheitel, wieder $= a$ gesetzt, in derselben Formel zu finden, wird $A = 45^0$, $x = C$ und $y = B$ (als halbe Winkel genommen).

An dem rechtwinkligen sphär. △ am Rand Fig. 17 ist

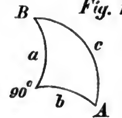


Fig. 17.

B der halbe Winkel der stumpferen Schtlkt. x,
A der halbe Randkantenwinkel,
a die Neigung der Kante x zur Diagonale der Basis, welche durch das Randeck r geht,
b der halbe Winkel der Basis am Randeck r.

Gegeben:	Gesucht:
Der halbe Schtlktw. $x = B$ und die Neigung der Kante x zur Diagonale der Basis in $r = a$	Der Randktw. $= 2A$ $\cos A = \cos a \sin B$ (38)
Der halbe Schtlktw. $x = B$ und der halbe Randktw. A	Der ebene Winkel der Fläche am Randeck $r = c$ $\cos c = \operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} B$ (39)
„ „ „ „	Der ebene Winkel der Basis am Randeck $r = 2\,b$ $\cos b = \dfrac{\cos B}{\sin A}$ (40)
„ „ „ „	Die Neigung der Kante x zur Diagonale der Basis in $r = a$ $\cos a = \dfrac{\cos A}{\sin B}$ (41)

Um die Neigung der Scheitelkante y zur Diagonale der Basis in o, zu finden, diese Neigung $= a$ gesetzt, hat man den halben Winkel von $y = B$ zu setzen und ebenso für den ebenen Winkel der Basis am Randeck $o = 2\,b$ ist $\frac{1}{2}\,y = B$ zu setzen.

An der Basis der Dioktaeder hat die Hälfte der Diagonalen die Lage der Diagonalen der Basis der als Stammform gewählten Quadratpyramide. Die zu diesen Diagonalen geneigten Scheitelkanten heissen die normalen, die übrigen die diagonalen. Bald sind diese bald jene die stumpferen. Wenn das Zeichen eines Dioktaeders mit Rücksicht auf die Stammform entworfen wird, so giebt die Tangente des Winkels, welchen eine normale Schtlkt. mit der sie schneidenden Diagonale der Basis bildet, die Axenlänge, welche durch die als 1 gesetzte

Axenlänge der Stammform dividirt, m giebt; n ist die Tangente des halben ebenen Winkels der Basis an jenen Ecken (r oder o) wohin sich die normalen Schtlkt. neigen.

Am Kassiterit (Axe der Stammform = 0.6743) sind an einem Dioktaeder die Schtlkt. von 118° 6′ die normalen, der Randktw. ist 135° 17′. Daraus berechnet sich nach Formel ([41]) $a = 63^\circ\, 39'$, dessen tang. = 2,018, durch die Axenlänge der Stammform dividirt, $m = 3$ giebt und nach Formel ([40]) ist $n = {}^3/_2$, daher das Zeichen dieses Dioktaeders $3\, P\, {}^3/_2$.

Rückwärts findet sich aus m, multiplicirt mit der Axenlänge der Stammform, die tang. des Winkels der norm. Schtlkt. mit der Diag. in r und somit dieser Winkel $= a$; n ist die tang. des halben ebenen Winkels der Basis in $r = b$.

Man hat dann im sphär. △ Fig. 17 zur Bestimmung des Winkels der normalen Schtlkt. $= 2\,B$ und des Randktw. $= 2\,A$ die Formeln $\operatorname{tg} B = \dfrac{\operatorname{tg} b}{\sin a}$ und $\operatorname{tg} A = \dfrac{\operatorname{tg} a}{\sin b}$.

An den Prismen $\infty P n$ bestimmt man n als die Taugente des halben Winkels derjenigen Seitenkanten, welche die Diagonale der Basis der Stammform schneiden.

Am Vesuvian ist der Winkel an einer Var. bei solchen Prismenkanten = 126° 52′ 15″, tg 63° 26′ 7″ = 1.999 = 2, daher das Zeichen des Prisma's ∞P_2.

Rhombenpyramide.

In dem am Scheitel Fig. 18 gelegten sphär. △ Fig. 19 ist

$C = 90^\circ$,

B der halbe Winkel der stumpferen Schtlkt. y

A „ „ „ „ schärferen „ x

a die Neigung der stumpferen Schtlkt. zur Axe
b „ „ „ schärferen „ „ „
c der ebene Winkel der Fläche am Scheitel.

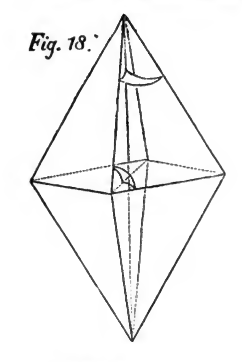


Fig. 18.

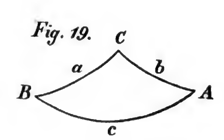


Fig. 19.

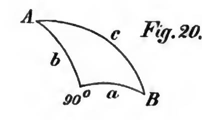


Fig. 20.

Gegeben:	Gesucht:
Der halbe Winkel an der Schtlkt. $y = B$ und an der Schtlkt. $x = A$	Die Neigung der stumpferen Schtlkt. zur Axe $= a$ $\cos a = \dfrac{\cos A}{\sin B}$ (42) $90^0 - a$ ist die Neigung dieser Kante zur Brachydiagonale.
„ „ „ „	Die Neigung der schärferen Schtlkt. zur Axe $= b$ $\cos b = \dfrac{\cos B}{\sin A}$ (43) $90^0 - b$ ist die Neigung dieser Kante zur Makrodiagonale.
„ „ „ „	Der ebene Wkl. der Fl. am Schtl. $= c$ $\cos c = \operatorname{cotg} A \ \operatorname{cotg} B$ (44)

In dem am stumpferen Randeck r gelegten sphär. △ (Fig. 20) ist
A der halbe Winkel an der Schtlkt. y
B „ „ „ „ „ Randkante z
a der halbe stumpfe ebene Winkel der Basis
b die Neigung der Schtlkt. y zur Brachydiagonale der Basis
c der ebene Winkel der Fläche am stumpferen Randeck r.

Gegeben:	Gesucht:
Der halbe Winkel der stumpferen Scheitelkt. $= A$ und der halbe ebene Wkl. der Basis an d Brachydiagonale $= a$	Der Randktw. $= 2B$ $$\sin B = \frac{\cos A}{\cos a} \quad (45)$$
„ „ „ „	Die Neigung der stumpferen Schtlkt. zur Brachydiagonale $= b$ $$\sin b = \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} A} \quad (46)$$
„ „ „ „	Der ebene Winkel der Fläche am stumpferen Randeck $r = c$ $$\sin c = \frac{\sin a}{\sin A} \quad (47)$$

Mit Einführung des halben Schtlktw. x und mit dem halben Randktw. z wird mit denselben Formeln die Neigung der schärferen Schtlkt. zur Makrodiagonale der Basis, der halbe spitze Winkel der Basis und der ebene Winkel der Fläche am spitzeren Randeck o berechnet.

Aus zwei Kantenwinkeln a und b kann an der Rhombenpyramide der dritte c in folgender Weise gefunden werden:

1) Wenn von den gegebenen Winkeln einer spitz $= x$ und das Suppl. des stumpfen $= y$ so ist

$$\cos V = (1 + \cos x) - \cos y \text{ und } c = 180^0 - V$$

2) Wenn die gegebenen Winkel beide stumpfe sind und ihre Suppl. x und y, so ist für c oder den dritten gesuchten Winkel

$$\cos c = (\cos x + \cos y) - 1.$$

Wenn der halbe Winkel an der Schtlkt. $y = A$ gegeben und die Neigung der brachydiag. Schtlkt. zur Brachydiagonale $= b$, so findet sich der halbe Randktw. $= B$ durch die Formel

$$\cos B = \cos b \sin A.$$

Die zur Stammform gewählte Rhombenpyramide P wird bestimmt durch die Tangente des Winkels der makrodiagonalen (schärferen) Schtlkt. mit der Makrodiagonale, diese Tangente giebt die halbe Hauptaxe a; die Tangente des halben Winkels der Basis giebt die halbe Brachydiagonale c, die halbe Makrodiagonale b ist daher $= 1$.

Sind die stumpferen Schtlkt. einer mPn zur Brachydiagonale der Basis der Stammform geneigt, so ist sie eine $m\bar{P}n$, ausserdem ist sie eine $m\breve{P}n$, ebenso ist ein Doma, welches zur Brachydiagonale der Basis der Stammform geneig ist, ein $m\bar{P}\infty$, ausserdem ein $m\breve{P}\infty$. Ein Prisma $\infty\breve{P}n$ erscheint als Zuschärfung der scharfen Seitenkante von ∞P, ein $\infty\bar{P}n$ als Zuschärfung der stumpfen Seitenkante von ∞P. Zur Ableitung einer brachydiagonalen Pyramide wird die Brachydiagonale der Stammform verlängert und dadurch oft länger als die unverändert $= 1$ gesetzte Makrodiagonale der Stammform; zur Ableitung einer makrodig. Pyramide wird an der Stammform die Makrodiagonale verlängert und bleibt die Brachydiagonale unverändert.

Bei Berechnung der letzteren Pyramiden ist die Brachydiagonale der abzuleitenden $m\bar{P}n$ der Brachydiagonale der

Stammform gleich zu setzen und danach das Verhältniss zur Makrodiagonale und weiter zur Hauptaxe zu bestimmen.

An der Stammform des Bleivitriols ist

$$a : b : c = 0.7755 : 1 : 0.6099.$$

An einer combinirten Pyramide findet man das Verhältniss

$$a : b : c = 0.3877 : 1 : 0.3044.$$

Da diese Pyramide nach ihrer Lage zur Stammform eine makrodiagonale ist, so hat man zu setzen $0.3044 : 0.6099 = 1 : n$ und somit wird $n = 2$. Nun ist der Werth von 2 statt 1 für die Makrodiagonale zu setzen und danach die Axe zu bestimmen und durch a der Stammform zu dividiren, womit m erhalten wird. Hier ist $1 : 0.3877 = 2 : a$ und $a = 0.7754$, d. i. gleich mit der Hauptaxe der Stammform, daher $m = 1$ und das Zeichen der Pyramide $\bar{P}2$.

Für eine $m\breve{P}n$, an welcher oft vorkommt, dass die verlängerte c der Stammform > 1 wird, d. i. grösser als die Diagonale b, wird letztere zur Brachydiagonale und bleibt $= 1$. Die Dimensionen einer solchen Pyramide sind daher durch den Winkel ihrer stumpferen Schtlkt. mit der Brachydiagonale und durch den halben stumpfen Winkel der Basis zu berechnen.

Am Topas findet sich eine solche Pyramide, deren stumpfere Schtlkt. zur Makrodiagonale der Stammform geneigt ist. Aus den Schtlktw. $x = 122^\circ 49' 24''$ und $y = 126^\circ 10' 10''$ findet sich nach Formel ([42]) die Neigung der stumpferen Schtlkt. zur Axe, deren compl. die Neigung dieser Kante zur Brachydiagonale (welche $= 1$) $= 32^\circ 27'$. Bezeichnet man diesen Winkel mit b, $\frac{1}{2}y$ mit A und den halben stumpfen Winkel der Basis mit a, so ist $\operatorname{tg} a = \operatorname{tg} A \sin b$ und $a = 46^\circ 35'$. Die

Tangenten dieser Winkel sind: tg 32° 27′ = 0 6359 und tg 46° 35′ = 1.0570. An der Stammform ist

$$a : b : c = 0.9539 : 1 : 0.5285 \text{ und}$$

$$\frac{0.6359}{0.9539} = 0.666 = {}^2/_3 \text{ und } \frac{1.0570}{0.5285} = 2,$$

daher das Zeichen der Pyramide $^2/_3 \breve{P}_2$.

Um aus dem Zeichen die Winkel der Rhombenpyramiden zu berechnen, hat man

1) für eine mP die Axe der Stammform a mit m zu multipliciren. Im sphär. △ Fig. 21 ist dann ma = tg$a$ = der Tangente des Winkel der makrodiag. Schtlkt. mit der Makrodiagonale der Basis und c der Stammform ist tg$b$ = der Tangente des halben spitzen Winkels der Basis. Daraus berechnet sich B = dem halben Winkel der makrodiag. Schtlkt. durch die Formel $\operatorname{tg} B = \frac{\operatorname{tg} b}{\sin a}$ und A = dem halben Randktw. durch die Formel $\operatorname{tg} A = \frac{\operatorname{tg} a}{\sin b}$.

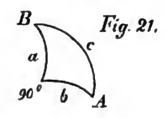


Fig. 21.

An der Stammform des Topas ist $a : b : c = 0.9539 : 1 : 0.5285$ für $^1/_3 P$ ist $ma = {}^1/_3 \,.\, 0.9539 = 0.31796 =$ tg$a$; daher $a = 17^0\ 38'$ $c = 0.5285 =$ tg$b$; daher $b = 27^0\ 51'\ 30''$; daraus folgt nach der angegebenen Formel $B = 60^0\ 10'\ 30''$, also $2B = 120^0\ 21'$ für den Winkel an der makrodiag. Schtlkt. und $A = 34^0\ 14'$, der Randktw. $2A = 68^0\ 28'$.

2) Für eine $m\breve{P}n$ hat man a der Stammform mit m und c derselben mit n zu multipliciren. ma ist tg$a$ wie im vorigen Fall und nc = tg$b$. Man berechnet damit B, welches der halbe Winkel an der makrodiag. Schtlkt., wenn $nc < 1$, und an der brachydiag. Schtlkt. wenn $nc > 1$.

Für die Pyramide $^2/_3\breve{P}_2$ ist am Topas mit der wie in 1) angenommenen Stammform $ma = 0.6359 = \text{tg}\,a$ und daher $a = 32^0\ 27'$; $nc = 1.0570 = \text{tg}\,b$ und daher $b = 46^0\ 36'$. Damit findet sich wie bei 1) $B = 63^0\ 6'$ und $2B = 126^0\ 12'$ als der Winkel an der brachydiag. Schtlkt. der $^2/_3\breve{P}_2$, weil $nc > 1$.

3) Für eine mPn multiplicirt man a der Stammform mit m und dividirt das Product und ebenso c der Stammform mit n. Es ist dann $\frac{ma}{n} = \text{tg}\,a$ wie oben und $\frac{c}{n} = \text{tg}\,b$, womit nach den bei 1) gegebenen Formeln B und A berechnet werden. B ist der halbe Winkel an der makrodiag. Schtlkt.

An der Stammform des Bleivitriols ist

$$a : b : c = 0.7755 : 1 : 0.6089.$$

An $\bar{P}_2$ ist die Hauptaxe der Stammform nicht verändert, sie ist also durch $n = 2$ zu dividiren und ebenso der Werth von c. Es ist $\frac{0.7755}{2} = 0.3877 = \text{tg}\,a$ und $a = 21^0\ 12'$ und $\frac{0.6089}{2} = 0.30445 = \text{tg}\,b$ und $b = 16^0\ 56'$. Damit findet sich der halbe Winkel der makrodiag. Schtlkt. $= B$ wie in 1) angegeben durch die Formel $\text{tg}\,B = \frac{\text{tg}\,b}{\sin a}$, $B = 40^0\ 6'$, der ganze Winkel also $80^0\ 12'$.

Zur Bestimmung der makrodiag. Domen $m\bar{P}\infty$ vergleicht man die cotg. des Winkels, welchen die Domenfläche mit der Axe bildet mit der cotg. des Winkels, welchen die brachydiag. Schtlkt. der Stammform mit der Axe bildet uud setzt letztere $= 1$.

An der Stammform des Bleivitriols ist die Neigung der brachydiagonalen Schtlkt. zur Axe $= 38^0\ 8'\ 15''$, dessen cotg $= 1.2738$; an einem combinirten makrodiag. Doma ist

die Neigung der Fläche zur Axe $= 57^0\ 30'\ 37''$, dessen cotg $= 0.6368$. Es ist $1.2738 : 1 = 0.6368 : {}^1/_2$ daher das Doma ${}^1/_2\bar{P}\infty$. Zur Bestimmung eines brachydiag. Doma's $m\breve{P}\infty$ vergleicht man die cotg. des Winkels, welche die Domenfläche mit der Axe bildet mit der Axe der Stammform und setzt letztere $= 1$.

An der Stammform des Topas ist

$$a : b : c = 0.9539 : 1 : 0.5285,$$

der Winkel eines $m\breve{P}\infty$ an der Axe ist $115^0\ 5'\ 22''$ und die Hälfte davon die Neigung der Fläche zur Axe $= 57^0\ 32'\ 41''$, dessen cotg $= 0.63597$ durch a der Stammform dividirt giebt $0.666 = {}^2/_3$, daher das Doma ${}^2/_3\breve{P}\infty$.

Umgekehrt hat man um aus dem Zeichen $m\breve{P}\infty$ den Domenwinkel zu finden, die Axen der Stammform a mit m zu multipliciren und für $m\,a$, als Cotangente genommen, den zugehörigen Winkel zu suchen, welcher der halbe Domenwinkel an der Hauptaxe ist.

Für ein $m\,P\infty$ hat man an der Stammform a mit c zu dividiren, die so reducirte Axenlänge a^1 mit m zu multipliciren und zu $m\,a^1$, als Cotangente genommen, den Winkel zu suchen, welcher der halbe Domenwinkel.

An der Stammform des Brookit ist

$$a : b : c = 0.9444 : 1 : 0.8416;$$

für ${}^4/_3\breve{P}\infty$ ist $m\,a = {}^4/_3 \,.\, 0.9444 = 1.2592 = \text{cotg. } 38^0\ 27'$, daher der Domenwinkel $= 76^0\ 54'$.

An demselben Mineral ist für ${}^1/_2\bar{P}\infty$

$$\frac{a}{c} = \frac{0.9444}{0.8416} = 1.122 = a^1 \text{ und}$$

$$m\,a^1 = {}^1/_2 \cdot 1.122 = 0.561 = \text{cotg } 60^0\ 42',$$

daher der Domenwinkel $= 121^0\ 24'$.

Um aus dem Winkel eines $\infty\bar{P}n$ das n zu bestimmen, sucht man die Tangente des halben scharfen Seitenktw. $= s$ und dividirt mit ihr c der Stammform, es ist $\frac{c}{\text{tg } s} = n$.

Am Brookit bildet ein Prisma l Zuschärfung der stumpfen Seitenkt. v. ∞P, ist also ein $\infty\bar{P}n$; sein scharfer Seitenktw. misst 45° 38′ 30″, dessen Hälfte 22° 49′ 15″;

$$\text{tg } 22^0\,49'\,15'' = 0.4207 = s;$$

$$c \text{ der Stammform} = 0.8416 \text{ und } n = \frac{0.8416}{0.4207} = 2,$$

das Prisma also $\infty\bar{P}2$.

Um aus dem Winkel eines $\infty\breve{P}n$ das n zu bestimmen, sucht man die Tangente seines halben an der Makrodiagonale der Stammform gelegenen Seitenktw. $= q$. (Diese Seitenkante ist meistens die stumpfe des Prisma's $\infty\breve{P}n$, kann aber auch die scharfe sein). Es ist dann $\frac{\text{tg } q}{c} = n$.

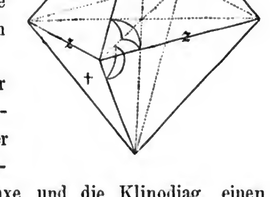
Am Bleivitriol misst bei einem $\infty\breve{P}n$ der Seitenktw. an der Makrodiag. der Stammform 101° 13′ 18″, der halbe Wkl. ist daher 50° 36′ 39″ $= q$, dessen tang. $= 1.2175$ c der Stammform ist 0.6089 und $\frac{\text{tg } q}{c} = \frac{1.2175}{0.6089} = 2$ daher das Prisma $\infty\breve{P}2$.

Von einem $\infty\bar{P}n$ findet man den scharfen Seitenktw. wenn man c der Stammform durch n dividirt, dann ist $\frac{c}{n} =$ der Tangente des halben scharfen Seitenktw.

Von einem $\infty\breve{P}n$ findet man den Seitenktw. welcher an der Makrodiag. der Stammform liegt, wenn man deren c mit n multiplicirt, dann ist cn die Tangente dieses halben Winkels.

Klinorhombische Pyramide.

Die Berechnung einer klinorhombischen Pyramide kann mit rechtwinklig. sphär. △ ausgeführt werden und sind dazu erforderlich:



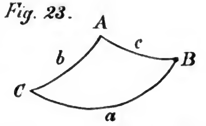
1) Der halbe Wkl. der Flächen an der schärferen klinodiagonalen Kante $= x$, welche der positiven + Hemipyramide angehört (für diese bildet die Hauptaxe und die Klinodiagonale einen spitzen Winkel).

2) der halbe Winkel der Flächen an der stumpferen klinodiag. Kante $= x^1$, welche der negativen — Hemipyramide angehört (für welche die Hauptaxe und die Klinodiag. einen stumpfen Winkel bilden.

3) die Neigung der Kante x zur Hauptaxe $= \mu$

4) „ „ „ „ x^1 „ „ $= \mu^1$

5) die Neigung der Kante x^1 zur Klinodiagonale $= v^1$.



Man legt Fig. 22 ein sphär. △ in den Scheitel, welches an der Axe einen rechten Winkel hat $= C$. (Fig. 23.)

Gegeben $A = x$ und $b = \mu$, gesucht B d. i. der Winkel der $+P$ Fläche mit dem orthodiagonalen Hauptschnitt, der durch die Kanten y geht

$$\cos B = \cos b \sin A$$

Um den Winkel B^1 der $-P$ Fläche mit dem orthodiag.

Hauptschnitt zu finden, wird $A^1 = x^1$ und $b^1 = \mu^1$ und wie vorher $\cos B^1 = \cos b^1 \sin A^1$. —

$B + B^1$ giebt den Winkel an den Kanten y. (I.)

Aus $A = x$ und dem berechneten B findet man a d. i. die Neigung der orthodiag. Kante y zur Axe

$$\cos a = \frac{\cos A}{\sin B}. \qquad \text{(II.)}$$

Die Neigung der orthodiagonalen Kante zur Orthodiagonale c ist dann $90 - a$ und wird dieser Winkel mit o bebezeichnet, so ist

$\operatorname{tg} o$ die Axenlänge für $c = 1$. (III.)

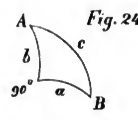


Fig. 24.

Um den halben ebenen Winkel der Basis an der Klinodiagonale zu finden, hat man in dem (oberen) am Randeck gelegten sphär. △ (s. Fig. 24)

$A^1 = x^1$, $b^1 = v^1$ und a der gesuchte Winkel (IV.)

$$\operatorname{tg} a = \operatorname{tg} A^1 \sin b^1$$

$90^0 - a = p =$ der halbe Winkel der Basis an der Orthodiagonale und $\operatorname{tg} p =$ die halbe Klinodiag. (für $c = 1$) (V.)

B in obigem △ giebt die Neigung der $-P$ Fläche zur Basis $\cos B = \cos b. \sin A$ (VI.)

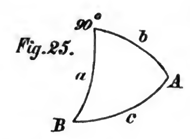


Fig. 25.

Man macht nun die Rechnung ebenso für die $+P$ durch das zweite (untere) sphär. △.

$B = x$, $a =$ die Neigung der Kante x zur Klinodiagonale (aus den vorhergehenden Bestimmungen sich ergebend) A die Neigung der $+P$ Fläche zur Basis

$$\cos A = \cos a \sin B$$

$A + B$ giebt den Randkantenw z der Pyramide. (VII.)

Die Berechnung der ebenen Winkel geschieht in ähnlicher Weise durch ein sphär. rechtw. △ an der Klinodiagonale und ein dergl. am Scheitel der Pyramide.

Wenn der halbe Winkel von $x^1 = A$ und die Neigung der $-P$Fläche zur Basis $= B$, so ist c der ebene Winkel der $-P$Fl. an der Klinodiagonale und

$$\cos c = \operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} B$$

und wenn A (am △ im Scheitel) der Winkel der $-P$Fläche mit dem orthodiag. Hauptschnitt und B der halbe Winkel der Kante x^1, so ist c der ebene Winkel der $-P$Fl. am Scheitel und c durch die vorige Formel bestimmt. In ähnlicher Weise werden die ebenen Winkel an der $+P$ berechnet.

An der Grundform ist das Verhältniss von $a : b : c$ das ist halbe Hauptaxe zur halben Klinodiagonale zur halben Orthodiagonale zu bestimmen und letztere $c = 1$ zu setzen. Es ist ferner der spitze Winkel der Hauptaxe mit der Klinodiagonale $= C$ (bei Kokscharow $= \gamma$) anzugeben.

Am Diopsid ist nach v. Kokscharow:

An der $+P$ der halbe Winkel der Kante

$$x = A = 60^0\ 24'\ 10'',$$

die Neigung der klinodiag. Kante x : Axe $= b = 74^0\ 30'\ 3''$; daraus findet sich für (I) $B = 76^0\ 34'$.

An der $-P$ ist der halbe Winkel der Kante

$$x^1 = A^1 = 65^0\ 44'\ 45'',$$

die Neigung der klinodiag. Kante x^1 : Axe $= b^1 = 49^0\ 51'$ daraus findet sich für (I) $B^1 = 54^0$.

$B + B^1 = 76^0\ 34' + 54^0 = 130^0\ 34'$ d. i. der Winkel der Flächen an der Kante y.

Aus dem obigen Winkel $A = 60^0\ 24'\ 10''$ und dem be-

rechneten $B = 76^0\ 34'$ findet sich für (II) $a = 59^0\ 29'$ und für (III) $o = 30^0\ 31'$, daher die Axenlänge

$$= \operatorname{tg} o = 0.58943 \text{ für } c = 1.$$

Für (IV) ist $A^1 = 65^0\ 44'\ 45''$ und $b^1 = v^1 = 24^0\ 20'\ 30''$; daraus findet sich $a = 42^0\ 27'$ und $p = 47^0\ 33'$; $\operatorname{tg} p = 1.09322$ ist die halbe Klinodiagonale für $c = 1$. Die Dimensionen sind daher $a : b : c = 0.58943 : 1.09322 : 1$ und C ist $74^0\ 11'\ 30''$.

Zur Bestimmung des Randkantenwinkels findet man nach (VI) $B = 33^0\ 50'$ und nach (VII). $A = 42^0\ 1'$ daher der Randkantenwinkel $A + B = 75^0\ 51'$.

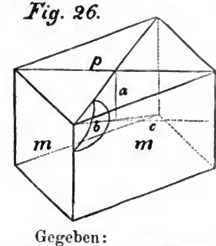
An der Stammform $\pm P$ werden analog wie im rhombischen System durch Veränderung der Hauptaxe und durch Verlängerung der Ortho- oder der Klinodiagonale Pyramiden abgeleitet; erstere sind $\pm mP$, die Orthopyramiden $\pm m$ **P** n, die Klinopyramiden $\pm m$ **P** n. Wenn $m = \infty$ entstehen rhombische Prismen, wenn n an den Orthopyramiden $= \infty$, entstehen Orthodomen, aus zwei verschiedenen Hemidomen bestehend, deren Kante der Orthodiagonale der Stammform parallel, und wenn n an den Klinopyramiden $= \infty$, entstehen Klinodomen von gleichartigen Flächen, deren Kante der Klinodiagonale parallel liegt.

Für die Charakteristik der Species genügt gewöhnlich die Bestimmung eines Hendyoeders, welches auch öfter zu beobachten und herzustellen ist als die Klinopyramide. An einer solchen Gestalt Fig. 26 ist in dem am unteren Randeck gelegten sphär. △ Fig. 27 $C = 90^0$

A der Winkel der Endfläche p mit der Seitenfläche m
B der halbe Seitenktw. am klinodiag. Hauptschnitt.

a die Neigung der Klinodiag. zur vorderen Seitenkt.
b der halbe ebene Winkel der Endfläche am unteren Eck
c der ebene Winkel der Seitenfläche am unteren Eck.

Fig. 26.



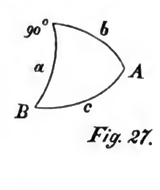


Fig. 27.

Gegeben:	Gesucht:
Die Neigung der Endfl. z. Seitenfl. $= A$ und der halbe Seitenktw. am klinodiagon. Hauptschnitt $= B$	Die Neigung der Klinodiagonale zur vorderen Seitenkt. $= a$. Das Suppl. v. a ist d. Neigung d. Klinodiag. z. Axe $\cos a = \frac{\cos A}{\sin B}$
,, ,, ,, ,,	Der ebene Winkel der Endfl. an der Klinodiagonale $= 2b$ $\cos b = \frac{\cos B}{\sin A}$
,, ,, ,, ,,	Der ebene Winkel der Seitenfläche am unteren Eck $= c$ $\cos c = \operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} B$
Die Neigung der Endfl. z. vorderen Seitenkt. $= a$ und der halbe Winkel dieser Kante $= B$	Die Neigung der Endfläche zur Seitenfläche $= A$ $\cos A = \cos a \sin B$

Die Dimensionen eines Hendyoeders bestimmt man durch Angabe des Verhältnisses der halben Hauptaxe $= a$ zur halben im klinodiag. Hauptschnitt liegenden Diagonale des horizon-

talen Schnittes $= b$, welche $= 1$ gesetzt wird und zur halben zweiten Diagonale dieses Schnittes $= c$. a ist die Cotg. des Winkels der Klinodiagonale mit der Hauptaxe und c die tang. des halben vorderen Seitenktw. — Die Berechnung der klinorhomboidischen Pyramide ist sehr weitläufig und nur mit schiefwinklig-sphärischen Dreiecken auszuführen. Es genügt zur Charakteristik gewöhnlich die Angabe eines klinorhomboidischen Prisma's mit seinen (sechserlei) Kantenwinkeln. Eine sehr brauchbare Formel für die Berechnung des Winkels λ im Rhomboid Fig. 28, wenn γ und β gegeben, ist die von Kupffer mitgetheilte $\operatorname{tg} \lambda = \frac{2 \sin \beta \sin \gamma}{\sin (\beta - \gamma)}$

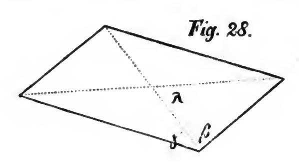


Fig. 28.

Vollständig berechnete klinorhomboidische Krystallreihen für den Pajsbergit und Anorthit gab v. Kokscharow in seinen Materialien zur Mineralogie Russlands B. IV. p. 178 u. 200. —

Die tesseralen Gestalten.

Die tesseralen Gestalten können mit den vorhergehenden Formeln leicht berechnet werden, denn es gelten an ihnen für alle dreiflächigen einkantigen Ecken die Formeln für das Rhomboeder, für alle vierfl. einkantigen Ecken mit gleicher Flächenneigung zur Eckenaxe die Formeln für die Quadratpyramide, für alle vierfl. Ecken mit abwechselnd gleichen Kanten die Formeln für die Rhombenpyramide; für sechsfl. Ecken, je nachdem ihre Kanten gleich oder nur abwechselnd gleich, die

Formeln für die Hexagonpyramide oder für das Scalenoeder u. s. w.

Hexaeder.

Es ist für manche Ableitung vortheilhaft, die Neigung der Flächen gegen die Eckenaxe $= a$ zu kennen. Man findet sie mit dem Kantenwinkel von 90^0 nach Formel (1)

$$\cos a = \frac{\cos 45^0}{\sin 60^0} \text{ zu } 35^0\ 15'\ 52''.$$

Die Neigung der Kante gegen die Eckenaxe ist nach Formel (3) $= 54^0\ 44'\ 8''$.

Oktaeder.

Aus dem halben Kantenwinkel $= 54^0\ 45'\ 8''$ findet sich der ebene Winkel c nach Formel (31) $= 60^0$ und da die Seiten des Dreiecks gleich lang, ist jeder seiner ebenen Winkel $= 60^0$.

Die Neigung der Oktaederfläche zur Fckenaxe ist

$$90 - 54^0\ 44'\ 8'' = 35^0\ 15'\ 52''$$

und unter dem Winkel von $54^0\ 44'\ 8''$ schneidet die Eckenaxe die Flächenaxe.

Tetraeder.

Aus der Ableitung folgt, dass die Kantenwinkel des Tetraeders gleich sind dem Winkel zweier an der Eckenaxe gegenüberliegender Oktaederflächen also gleich dem suppl. v. $109^0\ 28'\ 16''$ das ist $70^0\ 31'\ 44''$, ferner dass eine Axe welche durch ein Eck und die gegenüberliegende Fläche geht, die Kantenaxe (Hauptaxe) unter $54^0\ 44'\ 8''$ schneidet.

Rhombendodecaeder.

Aus dem halben Kantenwinkel von $60^0 = A$ findet sich der ebene Winkel am vierfl. Eck $= b$ durch Formel ([37]) zu $70^0\ 31'\ 44''$ und der ebene Winkel am dreifl. Eck (Suppl. des vorigen) durch Formel ([2]) welche sich in diesem Falle vereinfacht zu $\cos {}^1/_2\, b = \operatorname{cotg} A$. Die Axe durch die vierfl. Ecken schneidet die durch die dreifl. Ecken unter $54^0\ 44'\ 8''$

Tetrakishexaeder.

Es sei der Winkel an den längeren Kanten y gegeben und gesucht der Winkel an den kürzeren Kanten x. Man zieht vom gegebenen Winkel 90^0 ab, halbirt den Rest und berechnet (diesen als halben Randktw. genommen) nach Formel ([32]) den Winkel an den Kanten x. Der umgekehrte Fall mit Anwendung der Formel ([29]), sowie die Berechnung der ebenen Winkel mit Formel ([31]) und ([37]) bedarf keiner weiteren Erörterung.

Fig. 29.

Das Zeichen eines Tetrakishexaeders ist $\infty O n$, $n > 1$. Wenn der Winkel an den längeren Kanten gegeben $= y$ und $v = \frac{y - 90^0}{2}$, so ist $\operatorname{cotg} v = n$.

Umgekehrt ergibt sich aus n der Winkel v und ist dann der Winkel an den längeren Kauten $= y = 2\,v + 90^0$. Ein öfter vorkommendes $\infty O n$ hat $y = 126^0\ 52'\ 12''$, also ist $v = 18^0\ 26'$ dessen cotg $= 3$, daher das Zeichen $\infty O 3$.

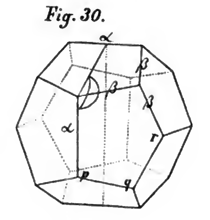
Für ein $\infty O {}^3/_2$ ist $\operatorname{cotg} v = 1.5$, $v = 33^0\ 41'$ und $2\,v + 90^0 = 157^0\ 22'$, der Winkel an den längeren Kanten.

Man kennt $\infty O^{5}/_{4}$ $(y = 167^0\ 19'\ 11'')$; $\infty O^{3}/_{2}$; $\infty O2$ $(y = 143^0\ 7'\ 48'')$ $\infty O3$; $\infty O^{7}/_{2}$ $(y = 121^0\ 53'\ 27'')$; $\infty O4$ $(y = 118^0\ 4'\ 21'')$. Dufrénoy führt noch $\infty O^{5}/_{2}$ an $(y = 133^0\ 36')$.

Pentagondodecaeder.

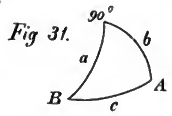
Es sei der Winkel an den einzelnen Kanten $= \alpha$ gegeben und gesucht der Winkel an den Kanten β. In dem in Fig. 30 verzeichneten sphär. △ Fig. 31 ist $B =$ dem halben Winkel der einzelnen Kante und a das Supplement des halben Winkels dieser Kante. Der verlangte Winkel ist A und $\cos A = \cos a \sin B$ giebt das Supplement von A. Man kann aber auch setzen $\cos A = \cos B \sin B$ wobei man wieder das Supplement von A erhält, da B das Suppl. von a ist, und da $2 \cos B \sin B = \sin 2B$ und $2B$ der ganze Winkel an den einzelnen Kanten, so wird, wenn man diesen mit α bezeichnet, $2 \cos A = \sin \alpha$, also

Fig. 30.



$\cos A = {}^1/_2 \sin \alpha$ das ist der cosinus des Supplements des Kantenwinkels β ist gleich dem halben sinus des Suppl. des Kantenwinkels α.

Fig 31.



Wenn $\alpha = 126^0\ 52'$ so ist dessen sinus $= 0.800$ und die Hälfte $0.400 = \cos 66^0\ 25'$ daher $\beta = 113^0\ 35'$.

Umgekehrt ist, wenn das Suppl. von β gegeben, das Suppl. von α durch die Formel $\sin \alpha = 2 \cos \beta$ zu finden.

Aus dem in der Figur verzeichneten sphär. △ ersieht man auch, wie durch Berechnung der Seite b der halbe ebene einzelne Winkel der Fläche d. i. $\frac{1}{2} r$ und durch Berechnung von c der an der einzelnen Kante gelegene ebene Winkel p gefunden wird. Es ist dann $540^0 - (2\,r + 2\,p) = q$ das ist der ebene Winkel am gleichkantigen Eck. Es dienen hiezu die Formeln $\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} B \sin a$ und $\operatorname{tg} c = \frac{\operatorname{tg} a}{\cos B}$.

Der ebene Winkel am gleichkantigen Eck kann auch direct gefunden werden, wenn der Winkel an den Kanten β gegeben, man berechnet ihn wie beim Rhomboeder nach Formel (²).

Das Zeichen des Pentagondodecaeders, als der Hemiedrie des Tetrakishexaeders, ist $\pm \frac{\infty O n}{2}$.

Wenn der halbe Winkel der einzelnen Kanten $= v$, so ist $\operatorname{tg} v = n$. Umgekehrt findet sich aus n der Winkel v und ist $2\,v$ der Winkel der einzelnen Kante. Wenn $\alpha = 112^0\,37'\,12''$ so ist $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha$ oder $\operatorname{tg} v = 1.5$, daher $n = \frac{3}{2}$ und das Zeichen $\frac{\infty O \frac{3}{2}}{2}$.

Naumann führt folgende, den bekannten Tetrakishexaedern entsprechende Pentagondodecaeder an:*)

	Winkel α	Winkel β
1) $\infty O \frac{5}{4}$	$102^0\,40'\,49''$	$119^0\,11'\,47''$
2) $\infty O \frac{3}{2}$	$112^0\,37'\,12''$	$117^0\,29'\,11''$
3) $\infty O 2$	$126^0\,52'\,12''$	$113^0\,34'\,41''$

*) Der Divisor 2 ist bei den Zeichen der Hemiedrieen als selbstverständlich weggelassen.

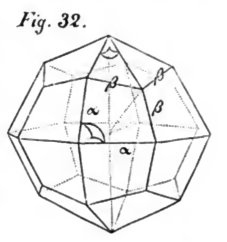
	Winkel α	Winkel β
4) $\infty O 3$	143° 7′ 48″	107° 27′ 27″
5) $\infty O ^7/_2$	148° 6′ 33″	105° 18′ 59″
6) $\infty O 4$	151° 55′ 40″	103° 36′ 32″

Dufrénoy führt auch $\infty O ^4/_3$ an (α = 106° 16′, β = 118° 41′) und Hessenberg vom Pyrit aus dem Binnenthal $\infty O ^{10}/_3$ (α = 146° 36′ 4″, β = 105° 58′ 33″).

Trapezoeder.

Es sei gegeben der Winkel an den längeren Kanten α, gesucht der an den Kanten β. Man berechne nach Formel ([37]) die Neigung der Fläche zur Hauptaxe = x. Da die trigonale Axe dieser Gestalt die Hauptaxe wie am Oktaeder unter 54° 44′ 8″ schneidet, so ist die Neigung der Trapezfläche zur trigonalen Axe = a = 125° 15′ 52″ —x. Aus dem so bestimmten Neigungswinkel wird der Winkel an den Kanten β nach Formel ([4]) berechnet.

Fig. 32.



Es sei α = 144° 54′ 12″ so berechnet sich x = 64° 45′ 38″ und a = 60° 30′ 14″, damit findet man nach ([4]) $^1/_2 A$ = 64° 45′ 38″ daher A oder der Winkel an der Kante β = 129° 31′ 16″.

Wenn β gegeben berechne man a nach ([1]), dann ist 125° 15′ 52″ —a die Neigung der Fläche zur Hauptaxe = x und wird der Kantenwinkel von α = 2 A durch die Formel $\cos A = \cos x \sin 45°$ erhalten.

Es sei $\beta = 160^0\ 14'$ so berechnet sich $a = 78^0\ 34'$, dann ist $x = 46^0\ 41'\ 52''$ und $A = 60^0\ 59'$ also $2\ A$ oder der Winkel an den längeren Kanten $\alpha = 121^0\ 58'$.

Der ebene Winkel der Fläche an der Hauptaxe findet sich, wenn α gegeben nach Formel ([37]) und mit β am dreiflächigen Eck nach Formel ([2]). Werden diese beiden Winkel addirt und von 360^0 abgezogen so ist jeder der übrigen Winkel die Hälfte des Restes.

Das Zeichen des Trapezoeders ist $m O m$.

Wenn der halbe Winkel an den längeren Kanten $= \alpha$ gegeben, so ist $\text{cotg}\ \alpha = \cos B$ und $\text{tg}\ B = m$.

Wenn $\alpha = 72^0\ 27'\ 6''$ so ist $B = 71^0\ 34'$ und $\text{tg}\ B = 3$ das Zeichen also $3 O 3$. Umgekehrt, wenn m gegeben, ist es $\text{tg}\ B$ und $\cos B = \text{cotg}\ \alpha$.

Naumann führt nachstehende Trapezoeder an, welche holoedrisch oder hemiedrisch beobachtet sind:

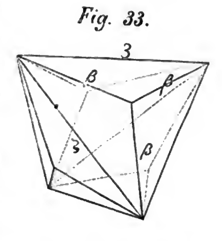
	Winkel an α	Winkel an β	
$\frac{4}{3} O \frac{4}{3}$	$118^0\ 4'\ 0''$	$166^0\ 6'\ 0''$	(Galenit)
$\frac{3}{2} O \frac{3}{2}$	$121^0\ 57'\ 56''$	$160^0\ 15'\ 0''$	
$2 O 2$	$131^0\ 48'\ 37''$	$146^0\ 26'\ 34''$	(Liparit, Leuzit, Granat etc.)
$\frac{8}{3} O \frac{8}{3}$	$141^0\ 18'\ 19''$	$134^0\ 2'\ 13''$	(Liparit)
$3 O 3$	$144^0\ 54'\ 12''$	$129^0\ 31'\ 16''$	(Liparit)
$4 O 4$	$152^0\ 44'\ 2''$	$120^0\ 0'\ 0''$	(Magnetit)
$6 O 6$	$161^0\ 19'\ 42''$	$110^0\ 0'\ 19''$	
$12 O 12$	$170^0\ 30'\ 20''$	$99^0\ 51'\ 34''$	
$40 O 40$	$177^0\ 8'\ 13''$	$92^0\ 53'\ 53''$	

Hessenberg beobachtete am Pyrit vom Binnenthal $9 O 9$ ($\alpha = 167^0\ 23'\ 47''$; $\beta = 103^0\ 13'\ 59''$).

Trigondodecaeder.

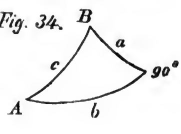
Gegeben der Winkel an den längeren Kanten ζ, gesucht der an den kürzeren Kanten β.

Man halbirt ζ und zieht von $125^0\ 15'\ 52''$ ab, so erhält man die Neigung der Fläche zur trigonalen Axe. Man berechnet damit nach Formel ([4]) beim Rhomboeder den Winkel an den Kanten β.



Umgekehrt findet man, wenn der Winkel in β gegeben, den Winkel in ζ durch Berechnung der Neigung der Fläche zur Axe des dreifl. Ecks nach Formel ([1]), zieht den gefundenen Winkel von $125^0\ 15'\ 52''$ ab und ist der Rest $= \frac{1}{2}\zeta$.

Von den ebenen Winkeln findet sich der stumpfe mit gegebenem Winkel β nach Formel ([2]), die spitzen sind dessen Supplement und jeder die Hälfte davon.



Das Zeichen ist $\frac{mOm}{2}$. Um m zu erhalten, berechnet man aus dem halben Winkel ζ die Neigung der Kante α des zugehörigen Trapezoeders zur Hauptaxe. Vgl. Fig. 32. Man hat im sphär. △ Fig. 34.

$B = 45^0;\ C = 90^0$

$a = \frac{1}{2}\zeta$ = Neigung der Fläche zur Hauptaxe

c der verlangte Winkel der Kante α mit der Hauptaxe

und ist $\operatorname{tg} c = \frac{\operatorname{tg} a}{\cos 45^0} = m$

Wenn m gegeben, findet sich a als der halbe Winkel an den Kanten ζ durch $\operatorname{tg} a = m \cos 45^0$.

Wenn $^1/_2\,\zeta = 62^0\ 3'\ 42''$ so ist $c = 69^0\ 26'$ und $\operatorname{tg} c = 2.665 = {}^8/_3$ daher das Zeichen $\frac{^8/_3\,O\,^8/_3}{2}$. —

$^8/_3 \cdot \cos 45^0 = 1.88561 = \operatorname{tg} 62^0\ 3'\ 41''$, welches der Winkel von $^1/_2\,\zeta$, daher $\zeta = 124^0\ 7'\ 22''$.

Die den vorher angegebenen Trapezoedern entsprechenden Trigondodecaeder sind:

	Winkel an ζ	Winkel an β
$^4/_3 O\,^4/_3$	86° 35′ 44″	166° 6′
$^3/_2 O\,^3/_2$	93° 22′ 20″	160° 15′ 0″
$2O2$	109° 28′ 16″	146° 26′ 34″
$^8/_3 O\,^8/_3$	124° 7′ 24″	134° 2′ 13″
$3O3$	129° 31′ 16″	129° 31′ 16″
$4O4$	141° 3′ 27″	120° 0′ 0″
$6O6$	153° 28′ 29″	110° 0′ 19″
$9O9$	162° 9′ 44″	103° 14′ 0″
$40O40$	175° 57′ 1″	92° 53′ 53″

Am öftesten sind ausgebildet beobachtet $2O2$ und $3O3$ am Tennantit und Tetraedrit (Fahlerz). Hessenberg beobachtete auch an einer Var. von Kahl im Spessart $^9/_5 O\,^9/_5$.

Triakisoktaeder.

Gegeben der Winkel an den längeren Kanten z, gesucht der an den kürzeren Kanten x. Man ziehe den halben Winkel z von $144^0\ 44'\ 8''$ (d. i. $180^0 - 35^0\ 15'\ 52''$ s. Fig. 36) ab, so ist der Rest die Neigung der Fläche zur trigonalen Axe $= v$, womit nach Formel (^{4}) der Kantenwinkel an x gefunden wird.

Umgekehrt berechnet man bei gegebenem Kantenwinkel x den Winkel v nach Formel (1) und ist $^1/_2\, z = 144^0\, 44'\, 8'' - v$.

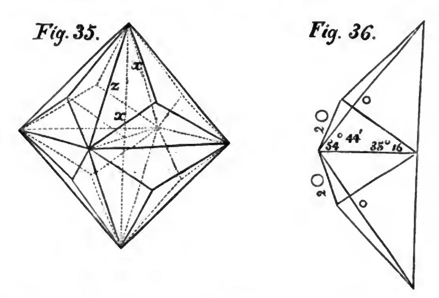


Fig. 35. Fig. 36.

Wenn $z = 141^0\ 3'\ 27''$, wird $v = 74^0\ 12'\ 25''$ und $= a$ in Formel (4). Damit berechnet sich $A = {}^1/_2\, x = 76^0\, 22'$, daher der Winkel $x = 152^0\, 44'$.

Den ebenen einzelnen Winkel der Fläche findet man mit dem Winkel der Kante x nach Formel (2).

Das Zeichen des Triakisoktaeders ist $m\, O$.

Man berechnet mit dem halben Winkel der längeren Kanten, als dem halben Randktwkl. einer Quadratpyramide betrachtet, die Neigung der zugehörigen Schtlkt. zur Diagonale der Basis nach Formel (33) und ist die Tangente des erhaltenen Winkels $= m$.

Umgekehrt, wenn m gegeben, findet man den Winkel an den längeren Kanten $= 2\, A$, wenn man zu m, als Tangente genommen, den zugehörigen Winkel $= a$ sucht und ist dann $\operatorname{tg} A = \frac{\operatorname{tg}\, a}{\sin 45^0}$.

Wenn der Winkel an $z = 141^0\, 3'\, 27''$ so ist a nach Formel (33) $= 63^0\, 26'$ und $\operatorname{tg}\, 63^0\, 26' = 2$, daher das Zeichen $2\, O$. —

Die öfter, vorzüglich beim Diamant beobachteten Varietäten dieser Gestalt sind:

$^3/_2 O$, $z = 129^\circ\ 31'\ 19''$ $x = 162^\circ\ 39'\ 30''$
$2\,O$, $z = 141^\circ\ 3'\ 27''$ $x = 152^\circ\ 44'\ 2''$
$3\,O$, $z = 153^\circ\ 28'\ 29''$ $x = 142^\circ\ 8'\ 11''$

Nach Naumann kommen noch vor: $^{65}/_{64} O$, $^5/_4 O$, $^7/_4 O$, und $4O$, am Alaun und Galenit in kleinen Flächen beobachtet.

Trapezdodecaeder.

Gegeben der Winkel an den kürzeren Kanten x, gesucht der an den längeren ζ. Man berechnet die Neigung der Fläche

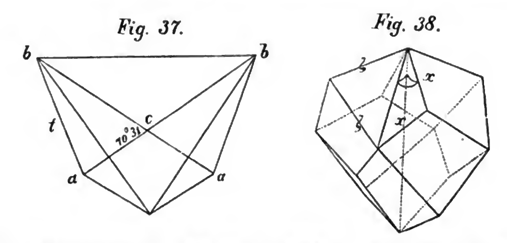


Fig. 37. *Fig. 38.*

zur Flächennormale $a\,b$ des Tetraeders (die hier als Axe eines Rhomboeders erscheint) nach Formel (1). Man erhält so, wenn Fig. 37 t die Fläche bezeichnet den Winkel $b\,a\,c$, zieht man diesen von $109^\circ\,28'\,16''$ ab, so erhält man den Winkel $a\,b\,c$ das ist die Neigung der Fläche zu $b\,a$, wo sie von ζ geschnitten wird und berechnet damit den Winkel von ζ als den Schtlktw. eines Rhomboeders nach Formel (4).

Wenn $x = 162^\circ\ 39'\ 30''$ so findet sich nach Form. (1)

der Winkel $bac = 79^0\ 58'\ 30''$ und $abc = 29^0\ 29'\ 46''$ und damit nach Formel (^{4}) $\frac{1}{2}\zeta = 41^0\ 5'$; $\zeta = 82^0\ 10'$.

Die ebenen Winkel berechnet man wie die eines Rhomboeders, dessen Scheitelkanten x und eines zweiten, dessen Schtlkt. ζ sind, womit man die einzelnen Winkel der Trapeze findet. Diese addirt und von 360^0 abgezogen geben die Summe der übrigen zwei und ist jeder die Hälfte davon. Das Zeichen ist $\frac{mO}{2}$. Um m zu bestimmen, hat man mit dem Winkel der Kante x den Winkel der Kante z des entsprechenden Triakisoktaeders zu berechnen. Diese Kante ist am Trapezdodecaeder verschwunden (vergl. Fig. 38 und 39.) Man berechnet, wie beim Triakisoktaeder angegeben mit x den Winkel v das ist die Neigung der Fläche zur trigonalen Axe nach Formel (^{1}) und ist $\frac{1}{2}z = 144^0\,44'\,8'' - v$. Weiter wird $\frac{1}{2}z$ als halber Randkantenwinkel A einer Quadratpyramide genommen und damit die Neigung ihrer Scheitelkt. zur Diagonale der Basis $= a$ nach Formel (^{33}) berechnet, $\text{tg}\, a = \text{tg}\, A \sin 45^0$ und $m = \text{tg}\, a$.

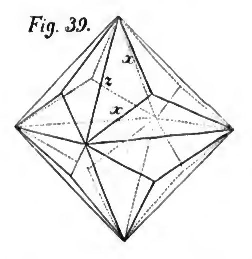


Fig. 39.

Umgekehrt findet sich, wenn m gegeben $= \text{tg}\, a$, der halbe Winkel von $z = A$ nach der Formel $\text{tg}\, A = \frac{\text{tg}\, a}{\sin 45}$ und dann $v = 144^0\ 44'\ 8'' - A$, womit man den Winkel an x durch die Formel $\cos \frac{1}{2}x = \cos v \sin 60^0$ findet.

Wenn $x = 162^0\ 39'\ 30''$ so wird nach (^{1}) $v = 79^0\ 58'\ 30''$ und $\frac{1}{2}z = 144^0\ 44'\ 8'' - v = 64^0\ 45'\ 38''$. Da-

mit findet sich die Neigung von z zur Diagonale der Basis $= a = 56^0\ 18'\ 35''$ und tg $a = 1.5$ daher das Zeichen $\frac{{}^3/_2 O}{2}$.

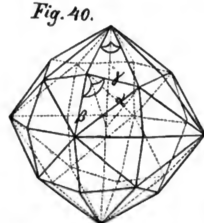
Von dieser, selten am Tennantit und Tetraedrit vorkommenden Gestalt werden angeben: ${}^3/_2 O$ ($x = 162^0\ 39'\ 30''$, $\zeta = 82^0\ 9'\ 45''$; $2O$ ($x = 152^0\ 44'\ 2''$, $\zeta = 90^0$); $3O$ ($x = 142^0\ 8'\ 11''$ $\zeta = 99^0 5' 5''$).

Hexakisoktaeder.

Es seien α die längsten Kanten
β die kürzeren am 8flächigen Eck
γ „ „ „ 6flächigen Eck.

1) Gegeben die halben Kantenwinkel von $\beta = B$ und von $\gamma = A$, gesucht der Winkel von α.

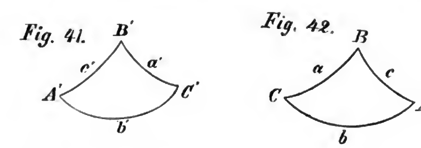
Fig. 40.



Man berechnet die Neigung der Kante β zur Kantenaxe des eingeschriebenen Oktaeders. Wenn diese Neigung gleich a so ist $\cos a = \frac{\cos A}{\sin B}$. Da sich am Hexakisoktaeder die Hauptaxe und die Axe der vierfl. Ecken im Centrum unter 45^0 schneiden so hat man $180^0 - (a + 45^0)$ oder $135^0 - a$ für die Neigung der Kante β zur anliegenden Hauptaxe (Fig. 40). Man hat dann in dem am achtfl. Eck gelegten sphär. △ Fig. 41.

A' = halber Kantenwinkel v. β
c' = Neigung der Kante β zur anliegenden Hauptaxe
B' = 45^0 und sucht C' das ist der halbe Winkel an den Kanten α; $\cos C' = \frac{\cos A' (\sin B' - x)}{\sin x}$; $\operatorname{cotg} x = \operatorname{tg} A' \cos c'$.

Am $4O_2$ ist $\beta = 154^{0}\,47'\,28''$ und $\gamma = 144^{0}\,2'\,58''$. Daraus berechnet sich $a = 71^{0}\,34'$ u. $c' = 135^{0} - a = 63^{0}\,26'$; x berechnet sich $= 26^{0}\,33'\,50''$ und $C' = 81^{0}\,7'\,22''$ daher $2\,C' = 162^{0}\,14'\,44''$ der Winkel an den Kanten α.



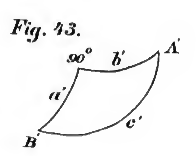
2) Gegeben die Winkel an α und β, gesucht der Winkel an γ.

Es ist im sphär. △ (s. Fig. 42.)
A der halbe Winkel von α
C " " " von β
$B = 45^{0}$.

Man berechnet die Neigung der Kante β zur Hauptaxe $= a$ und ist

$$\cos \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{\cos \tfrac{1}{2}(A + B - C) \; \cos \tfrac{1}{2}(A + C - B)}{\sin B \; \sin C}}$$

Es ist dann die Neigung der Kante β zur Kantenaxe des Oktaeders $= 135^{0} - a$ und im sphär. △ Fig. 43 am vierfl. Eck diese Neigung $= a'$ gesetzt, und der halbe Winkel der Kante $\beta = B'$, ist der gesuchte Winkel an $\gamma = 2A'$ und $\cos A' = \cos a' \sin B'$. Wenn $A = 81^{0}\,7'\,25''$ und $C = 77^{0}\,23'\,44''$ so berechnet sich $a = 63^{0}\,26'$; $135^{0} - a = 71^{0}\,34' = a'$ und nach



der letzten Formel $A' = 72^0\ 1'\ 35''$ daher $2A = \gamma = 144^0\ 3'\ 10''$.

3) Gegeben die Winkel an α und γ, gesucht der Winkel an β.

Die gegebenen Winkel können als die Scheitlktw. eines Skalenoeders gelten und man berechnet die Neigung der Kante γ zur Skalenoederaxe.

Es ist im sphär. △ Fig. 44

B der halbe Winkel der Kante γ

A „ „ „ der Kante α.

$C = 60^0$ und gesucht a

$$\cos {}^1/_2\, a = \sqrt{\frac{\cos {}^1/_2\,(A + B - C)\ \cos {}^1/_2\,(A + C - B)}{\sin B\ \sin C}}$$

Da sich am Oktaeder die Normalen einer Fläche und einer Kante im Centrum unter $35^0\ 15'\ 52''$ schneiden, so wird

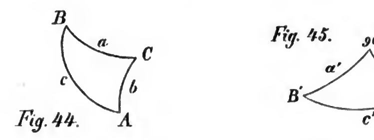


Fig. 44. Fig. 45.

die Neigung der Kante γ zur Kantenaxe des Oktaeders $= 180^0 - (a + 35^0\ 15'\ 52'') = 144^0\ 44'\ 8'. - a$. (S. Fig. 40.)

Man hat dann wieder im rechtwinkl. sphär. △ Fig. 45

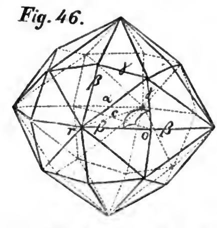
A' = der halbe Winkel der Kante γ

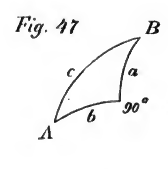
b' = die Neigung der Kante γ zur Kantenaxe des Oktaeders und findet den Winkel $\beta = 2B'$ durch die Formel $\cos B' = \cos b'\ \sin A'$. —

Wenn $A = {}^1/_2\,\alpha = 81^0\ 7'\ 25''$ u. $B = {}^1/_2\,\gamma = 72^0\ 1'\ 29''$ so berechnet sich $a = 68^0$ und wird $b' = 144^0\ 44'\ 8'' - a$

$= 76^{0}\ 44'\ 8''$ und $A' = 77^{0}\ 23'\ 38''$ daher der Winkel β $= 2\,A' = 154^{0}\ 47'\ 16''$.

Die ebenen Winkel der Flächen berechnen sich wie die am Scheitel des Skalenoeders. — Das Zeichen der Hexakisoktaeder ist $m\,O\,n$ (m und $n > 1$). Man kann zur Bestimmung von m und n in folgender Weise verfahren. Gegeben





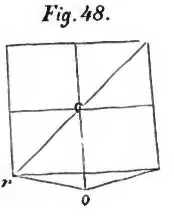
seien die Winkel an den Kanten β und γ. Man hat im rechtwinkl. sphär. △ Fig. 47

A = der halbe Winkel der Kante β

B = " " " " " γ

Man berechnet damit den ebenen Winkel $c\,o\,r$, welcher $= b$ durch die Formel $\cos b = \dfrac{\cos B}{\sin A}$.

Dann ist $180^{0} - (b + 45^{0})$ oder $135^{0} - b$ = der ebene Winkel $c\,r\,o = v$ und $\operatorname{tg} v = n$ (Fig. 48).



Um m zu finden, behandelt man die Flächen, welche am horizontalen Hauptschnitt (s. Fig 46) die Kanten β bilden, als die Flächen eines Dioktaeders und berechnet wie an einem solchen die Axenlänge, welche $= m$. Dazu hat man im

sphär. △ Fig. 24 den Winkel v aus der vorigen Rechnung $= a$ zu setzen, den halben Kantenwinkel von $\beta = B$ und zu bestimmen b. Dann ist $\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} B \cdot \sin a$ und $m = \operatorname{tg} b$.

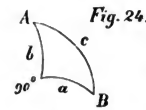


Fig. 24.

Umgekehrt findet sich aus m, als Tangente genommen, die Seite b im nebenstehenden △ und aus n ebenso die Seite a. Man hat dann zur Berechnung der Kantenwinkel $B = \frac{1}{2}\beta$; $\operatorname{tg} B = \frac{\operatorname{tg} b}{\sin a}$ (I) um den Winkel an den kürzesten Kanten γ zu finden, hat man zu n als Tangente genommen, den zugehörigen Winkel aufzusuchen und von 135° abzuziehen; der Rest $= b$ und $\frac{1}{2}\beta$ (aus (I) berechnet) $= A$ gesetzt, ist $\cos B = \cos b \sin A$ und $B = \frac{1}{2}\gamma$.

An einem Hexakisoktaeder ist der Winkel an $\beta = 160°$ 32′ 13″, an $\gamma = 152°$ 20′ 22″; man findet damit $b = 75°$ 58′ und $135° - b = 59°$ 2′ $= v$; $\operatorname{tg} v = 1.666 = \frac{5}{3}$ daher $n = \frac{5}{3}$. Für die Bestimmung von m wird $b = 78°$ 41′ und $\operatorname{tg} b = 4.996 = 5$. Daher $m = 5$ und das Zeichen des Hexakisoktaeders $= 5O\frac{5}{3}$. Von dieser am Diamant, Liparit, Granat, Cuprit u. a beobachteten Gestalt sind viele Varietäten beobachtet. Naumann giebt u. A. folgende an:

Zeichen	Winkel an α	Winkel an β	Winkel an γ
$\frac{15}{7} O \frac{15}{11}$	163° 38′ 11″	138° 45′ 18″	163° 38′ 11″
$3 O \frac{3}{2}$	158 12 48	148 59 50	158 12 48
$4 O 2$	162 14 50	154 47 28	144 2 58
$7 O \frac{7}{3}$	158 46 49	165 2 20	136 47 15
$8 O 4$	170 14 0	166 10 17	118 34 19

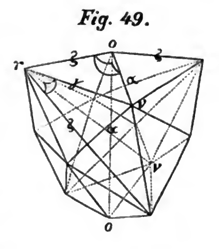
Die Winkel sind wegen der oft vorkommenden Krümmung der Flächen, nicht sicher zu messen.

Hexakistetraeder.

1) Gegeben der halbe Winkel an den Kanten $\alpha = A$ und der halbe Winkel an den Kanten $\zeta = B$, gesucht der Winkel an den Kanten γ.

Man berechnet die Neigung der Kante ζ zur Axe oo.

Fig. 49.



Diese Neigung giebt (Fig. 49 und 6) die Seite a und es ist $\cos a = \frac{\cos A}{\sin B}$. Man zieht den gefundenen Winkel a von $125^0\, 15'\, 52''$ ab und hat nun die Neigung der Kante ζ zur Axe rv. Man berechnet damit den Winkel an γ aus dem sphär. △ Fig. 11 (s. pag. 50) wo

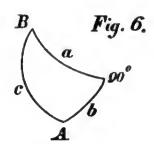
$B = 60^0$

c = Neigung der Kante ζ zur Axe rv

A = halber Winkel der Kante ζ;

gesucht wird C, welches $= {}^1\!/_2\, \gamma$.

Fig. 6.



$$\cos C = \frac{\cos A \sin (B - x)}{\sin x};$$

$\operatorname{cotg} x = \operatorname{tg} A \cos c.$

Wenn $\alpha = 162^0\, 55'$ und $\zeta = 124^0\, 51'$ so berechnet sich die Neigung $\zeta : oo = 80^0\, 21'\, 10''$ und $125^0\, 15'\, 52'' - 80^0\, 21' = 44^0\, 54'\, 42'' = c$; x findet sich $= 36^0\, 24'\, 17''$ und $C = 71^0\, 48'\, 28''$ also der Winkel an $\gamma = 2\, C = 143^0\, 37'$.

2) Gegeben sei der halbe Winkel an den Kanten $\zeta = C$ und der halbe Winkel an der Kante $\gamma = A$, gesucht der Winkel an den Kanten α.

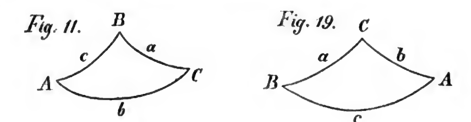
Es ist im sphär. △ Fig. 11

$B = 60^0$

$A = {}^1/_2\,\gamma$

$C = {}^1/_2\,\zeta.$

Man berechnet die Neigung von ζ zur Axe rv und subtrahirt den Winkel von $125^0\,15'\,52''$ und hat nun die Neigung von ζ: Axe oo, woran α berechnet wird.



Die Neigung von ζ: Axe rv ist im sphär. △ Fig. 11 die Seite a und

$$\cos {}^1/_2\,a = \sqrt{\frac{\cos {}^1/_2\,(A + B - C)\ \cos {}^1/_2\,(A + C - B)}{\sin B\ \sin C}}$$

Wenn a gefunden und $B = {}^1/_2\,\zeta$, so ist im sphär. △ Fig. 19 $\cos A = \cos a\ \sin B$ und A der halbe Kantenwinkel von α.

Wenn ${}^1/_2\,\zeta = 62^0\,26'$ und ${}^1/_2\,\gamma = 71^0\,49'$ so berechnet sich $\zeta : rv = 44^0\,54'$ also $\zeta : oo = 80^0\,21'\,52''$; $A = 81^0\,28'$ und $2\,A$ = der Kantenwinkel $\alpha = 162^0\,56'$.

3) Gegeben der halbe Winkel an α und der halbe Wkl. an γ, gesucht der Winkel an ζ.

Man berechnet die Neigung der Kante α zur Axe $rv = a$.

Es ist im sphär. △ $A = {}^1/_2\,\gamma$; $B = 60^0$; $C = {}^1/_2\,\alpha$ und gesucht a. (S. Fig. 11) Die Formel ist wie bei dem vorhergehenden Fall. Man subtrahirt den Winkel a wieder von $125^0\,15'\,52''$ und hat nun die Neigung von $\alpha : oo$; mit dieser Neigung und dem halben Kantenwinkel α berechnet man den Winkel an ζ. $A = {}^1/_2\,\alpha$; $b = \alpha : oo$, $c = 90^0$; $B = {}^1/_2\,\zeta$ und $\cos B = \cos b\ \sin A$. (S. Fig. 19).

Die ebenen Winkel der Flächen berechnen sich wie die am Scheitel des Skalenoeders. —

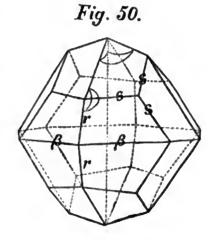
Das Zeichen eines Hexakistetraeders ist $\frac{m\,O\,n}{2}$. Um m und n zu finden berechnet man aus den Kantenwinkeln α und γ nach 3) beim Hexakisoktaeder den Winkel der (im Hexakistetraeder verschwundenen) Kante β und verfährt weiter wie beim Hexakisoktaeder angegeben ist. — Für die vorher berechnete Varietät findet man auf diese Weise nahezu $n = 2$ und $m = 4$, daher das Zeichen $\frac{4\,O\,2}{2}$.

Alle Varietäten des Hexakisoktaeders können Hexakistetraeder als Hemiedrieen liefern. Mehrere davon kommen beim Diamant vor.

Dyakisdodecaeder.

Gegeben die Kantenwinkel an r und β, gesucht der Kantenwinkel an s. (Fig. 50). Man berechne aus dem die Hauptaxe berührenden rechtwinkl. sphär. △ die Neigung von r und β zur Hauptaxe.

Fig. 50.



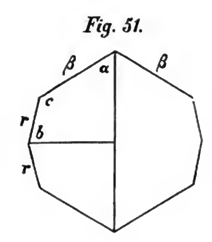
Wenn A = der halbe Winkel der Kante r

B = „ „ „ „ „ β (S. Fig. 19)

so ist a die Neigung der Kante β zur Hauptaxe und b diese Neigung der Kante r und ist (Form. [42] und [43])

$$\cos a = \frac{\cos A}{\sin B} \text{ und } \cos b = \frac{\cos B}{\sin A}.$$

Fig. 51.



Somit kennt man auch die Winkel des durch β und r gehenden Hauptschnittes und die Neigung der Kante β zur Kante r in einem solchen. Wenn letztere $= c$ so ist $c = 270^0 - (a + b)$. (S. Fig. 51).

Man hat im zweiten, durch s gehenden, sphär. △, welches ein schiefwinkliges, $A = \frac{1}{2}\, r$, $B = \frac{1}{2}\, \beta$, c = Neigung von $\beta : r$ in demselben Hauptschnitt. (S. Fig. 11).

Daraus findet sich C das ist der Winkel an den Kanten s.

$$\cos C = \frac{\cos A \ \sin (B - x)}{\sin x} \text{ und } \operatorname{cotg} x = \operatorname{tg} A \cos c.$$

Wenn der Kantenwinkel an $r = 119^0\ 3'\ 33''$, an $\beta = 160^0\ 32'\ 13''$, so berechnet sich $a = 59^0\ 2'$ und $b = 78^0\ 41'$, c wird $270^0 - (a + b) = 132^0\ 17'$, man erhält das Supplement von $C = 48^0\ 55'$, also $C = 131^0\ 5'$. —

Die ebenen Winkel finden sich ebenfalls leicht aus den bezeichneten sphär. △; am zweikantigen Eck bei gegebenem $\frac{1}{2}\, r = A$ und $\frac{1}{2}\, \beta = B$ nach Formel ([44]) als c; am einkantigen Eck bei gegebenem $\frac{1}{2}\, s = A$ nach Formel ([2])

als b; am dreikantigen Eck mit den 3 gegebenen Kantenwinkeln durch die Formel

$$\cos {}^1/_2\, a = \sqrt{\frac{\cos {}^1/_2\,(A + B - C)\, \cos {}^1/_2\,(A + C - B).}{\sin B\, \sin C}}$$

Für die vorher bezeichnete Var. sind diese Winkel: 79° 53′; 116° 6′; 57° 48′; 106° 13′.

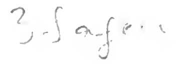
Das Zeichen des Dyakisdodecaeders ist $\left[\frac{m O n}{2}\right]$. Um m und n zu finden hat man mit den Kantenwinkeln r und β die Neigung dieser Kanten zur Hauptaxe nach den oben angegebenen Formeln zu berechnen. Es ist dann $\operatorname{tg} a = n$ und $\operatorname{tg} b = m$. Im vorhergehenden Beispiel war $a = 59^0\, 2'$ und $b = 78^0\, 41'$; es ist $\operatorname{tg} 59^0\, 2' = 1.666 = {}^5/_3$ und $\operatorname{tg} 78^0\, 41' = 4.996 = 5$ das Zeichen also $\left[\frac{5 O {}^5/_3}{2}\right]$.

Wie aus m und n die Kantenwinkel etc. zu berechnen, ist aus dem in Fig. 50 gelegten sphär. △ Fig. 19 zu ersehen. Da $m = \operatorname{tg} b$ und $n = \operatorname{tg} a$, so sind a und b bekannt und ist $\operatorname{tg} B = \frac{\operatorname{tg} b}{\sin a}$ und $B = {}^1/_2\, \beta$; $\operatorname{tg} A = \frac{\operatorname{tg} a}{\sin b}$ und $A = {}^1/_2\, r$.

Für $\left[\frac{3 O {}^3/_2}{2}\right]$ ist $m = 3 = \operatorname{tg} b$; $b = 71^0\, 34'$; $n = 1.5 = \operatorname{tg} a$; $a = 56^0\, 19'$, damit findet sich $B = 74^0\, 29'\, 58''$ und daher $2 B = \beta = 148^0\, 59'\, 56''$ ferner $A = 57^0\, 41'\, 41''$, daher $2 A = r = 115^0\, 23'\, 22''$.

Oefter, namentlich am Pyrit und Kobaltin vorkommende Varietäten sind ausser der eben angegebenen $\left[\frac{4 O 2}{2}\right]$ und $\left[\frac{5 O {}^5/_3}{2}\right]$. —

Wenn man die Lage der Flächen combinirter Formen an einer Stammform kennt, lassen sich dergleichen Formen vielfach ohne Messung bestimmen, wenn die Stammform gehörig bestimmt ist, oder es reicht dazu oft eine einzige Messung hin. Dabei ist der Parallelismus der Combinationskanten mit einer Kante, Höhenlinie, Diagonale etc. der Stammform zu berücksichtigen. Es sind desshalb im Vorhergehenden viele Bestimmungen aufgenommen worden, welche nicht nöthig wären, hätte man es nur mit einfachen Formen zu thun und die Vortheile, an einer Stammform die Lage möglichst vieler Theile zu bestimmen, treten bei der Entwickelung der Combinationen deutlich hervor. —






München 15

